Exo 17 (Zêta de Riemann) $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$

(a) Par définition, $n^z = e^{z \ln n}$. On a déjà vu (exo 8) que e^z est analytique sur $\mathbb{C}$, donc n^z l'est aussi. Si $z = x+iy$, alors.

$|n^z| = |e^{(x+iy)\ln n}| = e^{x \ln n} = n^x = n^{\operatorname{Re} z}$.

(b) Soit $z = x+iy$, $x \geq 1+\varepsilon$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}}$

$= \left[\frac{t^{-\varepsilon}}{-\varepsilon}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{\varepsilon}$. Donc la série converge uniformement.

(c) Du point précédent on voit aussi que ζ ~~[illegible]~~ converge absoluement sur H.

La continuité est conséquence de la convergence uniforme sur $H_\varepsilon = \{z \mid \operatorname{Re} z \geq 1+\varepsilon\}$, et du fait que $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^z}$ est continue (somme de fonctions analytiques).

Exo 18. $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. $T(w) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} w^n$

(a) $\rho_S^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln n}} = 1$. donc $\rho_S = 1$.

$\rho_T^{-1} = \rho_S^{-1}$ (même calcul)

(b) On rappelle ~~remarque~~ que si $\log$ est la détermination principale du logarithme sur $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, alors $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$

D'où $f(z) = -\log(1-z)$.

De meme, $T(w) = i\pi - \log(1+w)$, d'où $g(z) = T(z-2) = i\pi - \log(z-1)$

{ On remarque que si $z \in D(0,1) \Leftrightarrow 1-z \in D(1,1)$
$z \in D(2,1) \Leftrightarrow z-1 \in D(1,1)$

Soit maintenant $R_{\frac{\pi}{2}} = \{iy \mid y \geq 0\}$, et $U_{\frac{\pi}{2}} = \mathbb{C}\setminus R_{\frac{\pi}{2}}$.

Soit log la détermination principale du logarithme sur $U_{\frac{\pi}{2}}$

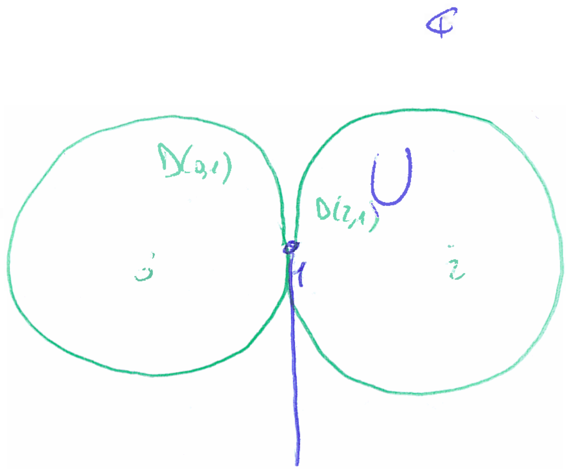
En particulier, ~~...~~ $e^{u+iv} = x+iy$.

$\iff e^{u} = x\ ;\ v \equiv y \mod(2\pi)$

$\iff u = \ln x,\ \ v = y \in \left]-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

On définit sur ~~...~~

$U = \{z \in \mathbb{C} \mid 1-z \notin R_{\frac{\pi}{2}}\} = \mathbb{C}\setminus\{1+iy \in \mathbb{C} \mid y \leq 0\}$,



la fonction $h : U \to \mathbb{C}$, $h(z) = -\log(1-z)$.

Clairement $h \equiv f$ sur $D(0,1)$. On veut montrer que $h \equiv g$ sur $D(2,1)$ (Remarque : U est bien convexe).

Soit $z \in D(2,1)$. $-\log(1-z) \overset{?}{=} i\pi - \log(z-1)$.

On a bien que ~~exp(log(1-z)) = exp 1-z = -(z-1) = ...~~

$$e^{\log(z-1)-\log(1-z)} = \frac{z-1}{1-z} = -1. \text{ donc } \log(z-1)-\log(1-z) \overset{?}{=} i\pi(1+2k),\ k\in\mathbb{Z}.$$

et $e^{w} = -1 \iff w = i(\pi + 2k\pi)$ pour un $k \in \mathbb{Z}$

Pour $z=2$, on a $\log(2-1) = \log 1 = 0$ (car log est la détermination principale, donc $\log \equiv \ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$), et $\log(1-2) = \log(-1) = -i\pi$, car $\mathrm{Im}\log \in \left]-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc la différence est $i\pi$.

Exo 19. $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert connexe. $f : U \to \mathbb{C}$ analytique, $f'(z) = \frac{1}{z}$ $\forall z \in U$, $\exists z_0$ t.q. $\exp(f(z_0)) = z_0 \overset{?}{\Rightarrow} \exp(f(z)) = z$ $\forall z \in U$

Considérons un $\varepsilon > 0$ assez petit, et un voisinage $V = D(z_0, \varepsilon)$ de z_0.

Soit $\log$ une détermination du logarithme. On a $\exp \circ \log(z) = z$ $\forall z \in V$, et $\log'(z) = \frac{1}{z}$ (en dérivant $\exp \circ \log = \mathrm{id} \leadsto \underbrace{\exp \circ \log(z)}_{z} \cdot \log'(z) = 1$)

f est analytique et $f'(z) = \frac{1}{z}$, donc $(f - \log)'(z) = 0$ $\forall z \in V$, ce qui implique $f - \log = k$ const $\Rightarrow f(z) = \log(z) + k$

Or, en z_0 on a $z_0 = \exp(f(z_0)) = \exp(\log(z_0) + k) = \exp \log(z_0) \cdot e^k = z_0 \cdot e^k$.

D'où on a $e^k = 1$ et $k \in 2\pi i \mathbb{Z}$. Donc $f \equiv \log + 2\pi i h$ pour un $h \in \mathbb{Z}$, (on V)

ce qui est une détermination du logarithme

Enfin, $\exp \circ f$ est analytique sur U, et $\exp \circ f \equiv \mathrm{id}$ sur V (qui a points d'accumulation). Par le principe du prolongement analytique, $\exp \circ f \equiv \mathrm{id}$ sur U, et f est une détermination du logarithme.

Exo 20 $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup]-1, 1[$.

On veut trouver $f : U \to \mathbb{C}$ analytique telle que :

$f(0) = i$, $(f(z))^2 = z^2 - 1$ $\forall z \in U$.

On voudrait définir "$f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$" on pourrait essayer $f(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2 - 1)}$, avec $\log$ une détermination appropriée du logarithme.

Soit $R_0 = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. et $U_0 = \mathbb{C} \setminus U_0$.

on remarque que $z^2 - 1 \in R_0 \Leftrightarrow z^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow z^2 \geq 1 \Leftrightarrow z \leq -1$ ou $z \geq 1 \Leftrightarrow z \notin U$.

Donc $z^2 - 1 \in U_0 \Leftrightarrow z \in U$.

On pourra donc considérer une détermination du log. sur U_0.

On veut aussi que $f(0) = e^{\frac{1}{2}\log(0^2-1)} = i$,

c'est à dire, $e^{\frac{1}{2}\log(-1)} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

On veut donc que $\frac{1}{2i}\log(-1) = \frac{\pi}{2} \mod (2\pi) \Leftrightarrow \log(-1) = i\pi \mod (4\pi i)$.

On peut par exemple considérer la détermination du logarithme où la partie imaginaire du log est contenue en $]0, i\pi[$.

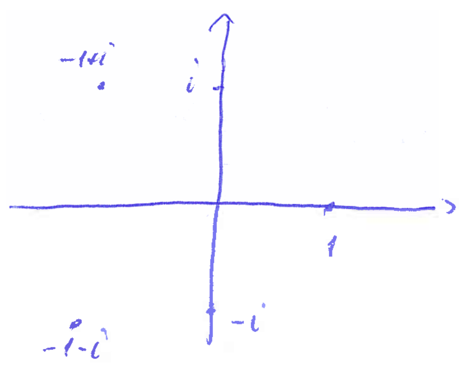
(prendre la détermination $+4\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$ ne change pas la valeur de f)

Exo 21.

(a) $R_\pi = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, $U_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_\pi$

La détermination principale du logarithme est tel que

$\operatorname{Im}(f(z)) \in]-\pi, \pi[\ \forall z \in U_\pi$.



$f(1) = 0$ ($f \equiv \ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$).

$f(i) = \ln|i| + i\arg(i) = 0 + \frac{\pi}{2}i$

$f(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = 0 - \frac{\pi}{2}i$

$f(-1+i) = \ln|-1+i| + i\arg(-1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}$

$f(-1-i) = \ln|-1-i| + i\arg(-1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{3\pi}{4}$

$2^i = e^{if(2)} = e^{i\ln 2} = \cos\ln 2 + i\sin\ln 2$

$i^i = e^{if(i)} = e^{i\frac{\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

$(-i)^i = e^{if(-i)} = e^{i(-\frac{\pi}{2}i)} = e^{+\frac{\pi}{2}}$.

(b) $R_0 = \mathbb{R}_+$, $U_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $f(re^{i\alpha}) = \ln r + i\alpha$, $\alpha \in]0; 2\pi[$.

$1 \notin U_0 \Rightarrow f(1)$ n'est pas défini.

$f(i) = f(1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$

$f(-i) = f(1\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}) = i\cdot\frac{3\pi}{2}$

$f(-1+i) = f(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}$

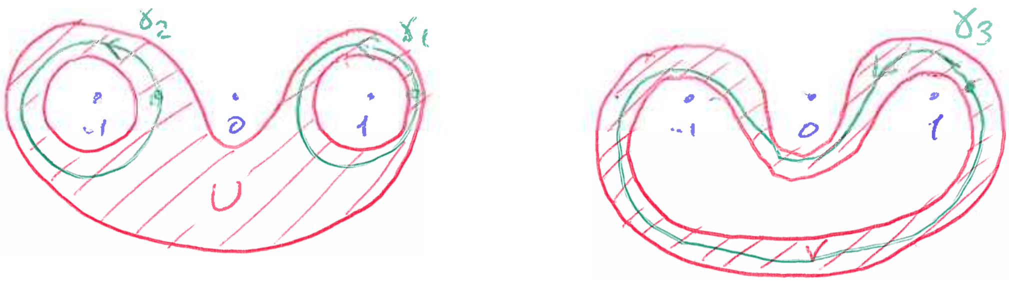
$f(-1-i) = f(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{5\pi}{4}$

$2^i = e^{if(2)}$ n'est pas défini, car $2 \notin U_0$.

$i^i = e^{if(i)} = e^{i\cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

$(-i)^i = e^{if(-i)} = e^{i\cdot i\cdot\frac{3\pi}{2}} = e^{-\frac{3\pi}{2}}$.

Exo 22.



(a) Notation : $R_\alpha = \{re^{i\alpha}, r \geq 0\}$, $U_\alpha = \mathbb{C}\setminus R_\alpha$.

On remarque que $V \subseteq U \subseteq U_{\frac{\pi}{2}}$. Donc il existe une détermination du logarithme sur $U_{\frac{\pi}{2}}$ ⇝ sur U et V.

(b) $\log(z^2-1)$: f est une détermination si $\exp(f(z)) = z^2-1$ $\forall z \in \Omega$ ($\Omega = U, V$)

Soit $f(z) = \underset{\mathbb{R}}{u(z)} + i\underset{\mathbb{R}}{v(z)}$ alors $\exp(f(z)) = e^{u(z)}\cdot e^{iv(z)}$, et $u(z) = \log|z^2-1|$,

et $v(z) = \arg(z^2-1)$. Or, $\arg(z^2-1) = \arg(z-1) + \arg(z+1)$.

Considerons le lacet γ_3 en figure. Au point de départ, $\arg(z+1) \equiv \arg(z-1) \equiv 0 \pmod{2\pi}$

En parcourant γ_3, on peut voir que l'argument fait un tour complet autour 1 et autour -1. Donc après un tour, $\arg(\gamma(1)^2-1) = \arg(\gamma(0)^2-1) + 4\pi$

On conclut qu'il n'y a pas de déterminations continues de $\log(z^2-1)$ (ni sur U, ni sur V)

(c) $\sqrt{z^2-1}$: on veut définir $f(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$

On a vu sur (b) que il n'y a pas de détermination des $\log(z^2-1)$.

Sur γ_3 en revanche, l'argument est bien défini mod 4π,

et donc l'argument de $\frac{1}{2}\log(z^2-1)$ est bien défini mod 2π.

Il s'en suit que f est bien défini et continu le long γ_3.

Si on considère V, pour n'importe quel chemin, $\arg(z^2-1)$ sera défini modulo un multiple entier de 4π.

Il s'en suit que f est bien défini sur V.

(Formellement, on peut montrer que V se rétracte sur $\gamma_3(I)$, puis calculer l'indice de γ_3 à 1 et à -1, qui est $+1$ dans les deux cas).

Pour U, on peut considérer γ_1. Dans ce cas $\mathrm{ind}_{\gamma_1}(1) = 1$ et $\mathrm{ind}_{\gamma_1}(-1) = 0$. D'où $\arg(z^2-1)$ est bien défini sur γ_1 que à 2π-près, et $e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$ ~~est défini~~ ~~modulo~~ a l'argument défini modulo π.

Donc on n'a pas de déterminations continues de $\sqrt{z^2-1}$ sur U.

(d) $\sqrt[3]{z^2-1}$. On peut argumenter comme dans (c). Sur V, $\arg(z^2-1)$ est défini mod (4π) et donc $\frac{1}{3}\ln(z^2-1)$ est défini mod $\frac{4\pi i}{3}$. Il s'en suit que $\sqrt[3]{z^2-1}$ n'admet pas de détermination continue sur V, et de conséquence non plus sur $U \supseteq V$.

(e) $\sqrt{z(z^2-1)}$. On a vu que $\log z$ a une détermination continue sur U. Donc $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z}$ aussi. De plus $\forall z \in U, \sqrt{z} \neq 0$

Il s'en suit que $\sqrt{z(z^2-1)}$ admet une détermination continue si et seulement si $\sqrt{z^2-1}$ en admet une. Donc c'est le cas pour V, et pas le cas pour U.

(f) $\sqrt[3]{z(z^2-1)}$. C'est analogue au point (e), et en ce cas on n'a pas de détermination continue ni en U, ni en V.

(g) $\sqrt[3]{\underbrace{z(z-1)((z-1)^2-\eta^2)}_{p(z)}}$, $|\eta| << 1$.

On remarque que $(z-1)^2-\eta^2 = (z-1-\eta)(z-1+\eta)$.

Or, $\mathrm{ind}_{\gamma_1}(1) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(1 \pm \eta) = 1$ pour $|\eta| << 1$.

De même, $\mathrm{ind}_{\gamma_2}(1) = \mathrm{ind}_{\gamma_2}(1 \pm \eta) = 0$. et $\mathrm{ind}_{\gamma_3} = \mathrm{ind}_{\gamma_1} + \mathrm{ind}_{\gamma_2}$.

Il s'en suit que, peu importe le chemin considéré ($\pi_1(U)$ est engendré par γ_1, γ_2) on a que ~~arg(γ(1))~~ $\arg(p(\gamma(1))) - \arg(p(\gamma(0)))$ est multiple entier de $3 \cdot 2\pi$. Donc $e^{\frac{1}{3}\log p(z)}$ est défini mod $\frac{3 \cdot 2\pi}{3}$, et

$f(z) = e^{\frac{1}{3}\log p(z)}$ est bien défini et une détermination sur U.

Comme $V \subseteq U$, on a une détermination sur V aussi.